第 43 卷　第 5 期
2004 年 9 月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol. 43　No. 5
Sep. 2004

·研究简报·
文章编号:0438-0479(2004)05-0734-02

关于平面域上波动方程整体解存在性的一个猜想

曹 镇 潮
(厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005)

摘要: 关于二维波动方程整体解存在性,Glassey 1981 年提出一个猜想:非线性增长阶的临界值可能是$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$. 本文将指出这一猜想未必成立.

关键词: 波动方程;整体解存在性;临界值
中图分类号: O 175.27　　　**文献标识码**:A

考虑平面域上波动方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \Delta u(x,t) = | u(x,t) |^p, \\ \quad x \in R^2, t \in (0,T), p > 1 \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in R^2 \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), \quad x \in R^2 \end{cases} \tag{1}$$

其中初始数据 f, g 满足:

$1°$ $f, g \in C_0^\infty(R^2)$,
$\mathrm{supp}\{f, g\} \subseteq \{ \| x \| \leq L\}$.

$2°$ $\int_{R^2} f > 0, \int_{R^2} g > 0$.

一个引人兴趣的问题:是否存在非线性增长阶的临界值 $p_0 > 1$ 使得:$p > p_0$ 时,(1) 存在整体解;$1 < p < p_0$ 时,(1) 不存在整体解.

在三维空间 R^3 的情况,John F[1] 给出了临界值 $p_0 = 1 + \sqrt{2}$;在任意的 $R^n (n > 1)$ 时,Kato T[2] 没有给出临界值,但证明了当 $1 < p \leq \frac{n+1}{n-1}$ 时整体解不存在;Glassey R T[3] 在 1981 年给出:当 $n = 3$ 时临界值 $p_0 = 1 + \sqrt{2}$,当 $n = 2$ 时,他证明了当 $1 < p < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ 时,整体解不存在. 于是他猜想当 $n = 2$ 时临界值 $p_0 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$,即:

当 $p > \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ 时,(1) 存在整体解.

当 $1 < p < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ 时,(1) 不存在整体解,即:解将在有限时间性 Blow up.

我们的工作将指出 Glassey 的上述猜想未必成立. 首先我们可以证明 $3 < p < 5$ 时,(1) 不存在整体解.

定理　设

1) $f(x), g(x) \in C_0^\infty(R^N)$,
$\mathrm{supp}\{f, g\} \subseteq \{ \| x \| \leq L\}$.

2) $\int_{R^2} f \cdot g \mathrm{d}x \geq 0$ 且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不同时为零.

3) $\frac{2}{p+1} \| f(x) \|_{p+1}^{p+1} - \| \nabla f \|_2^2 - \| g \|_2^2 \geq 0$

那么当 $3 < p < 5$ 时,问题(1) 不存在整体解,即存在 T_0 使得

$$\lim_{t \to T_0^-} \int_{R^2} u^2(x,t) \mathrm{d}x = +\infty.$$

关键的是我们能否寻找构造出一对原始数据 $f(x)$ 和 $g(x)$,使他们它们既满足 $1° \sim 2°$,又满足 1) ～ 3).

我们可以按如下方法构造:

显然存在函数 $h(x) \in C_0^\infty(R^2)$, $h(x) \geq 0$,

收稿日期:2003-07-15
基金项目:国家自然科学基金(60274008,10171084)资助
作者简介:曹镇潮(1946-),男,教授.

$\not\equiv 0$, supp $h(x) \leq \{|x| \leq L\}$. 记

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{p+1} \cdot \left(\int_{R^2} h(x)^{p+1}\right) / \left(\int_{R^2} h^2 + \int_{R^2} |\nabla h|^2\right),$$

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

可取

$$f(x) = \varepsilon h(\varepsilon^{\frac{p}{2}} x),$$

$$g(x) = \varepsilon^{\frac{p+2}{2}} h(\varepsilon^{\frac{p}{2}} x),$$

则可验证 $f(x)$, $g(x)$ 满足前面所有条件 1°～2°和 1)～3). 由此当 $3 < p < 5$ 时, 方程(1)不存在整体解,注意到 $5 > \frac{3+\sqrt{17}}{2} > 3$,由此, Glassey 猜想临界值是 $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ 未必成立.

参考文献:

[1] John F. Blow up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions[J]. Manuscripta Math. ,1979 ,28 :235 - 268.

[2] Kato T. Blow-up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations[J]. Comm. PuaeAppl. Math. ,1980 ,32 :501 - 505.

[3] Glassey R T. Finite-time blow-up for folutions of nonlinear wave equations[J]. Math. Z. ,1981 ,177 :323 - 340.

About a Guess to a Global Nonexistence Theorem for a Wave Equation on R^2

CAO Zhen-chao

(School of Mathenatical Science ,Xiamen Univ. ,Xianen 361005 ,China)

Abstract : The global nonexistence for the Cauchy problem of a wave equation on R^2 is considered in ghis paper. A counter example to Glassey R 'S conjecture about the critical value is given.

Key words : wave equation ;existence of global stlution ;critical value